ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-339-350
УДК 517.55

О наилучшем приближении и значениях поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана

Мухтор Рамазонович ЛАНГАРШОЕВ
ГАПОУ «Подмосковный колледж «Энергия»
142450, Российская Федерация, Московская обл., г. Старая Купавна, ул. Большая Московская, 190

Аннотация. В статье рассматривается экстремальная задача нахождения точных констант $\chi_{m,n,r}(\tau)$ в неравенствах типа Джексона–Стечкина, связывающих наилучшие приближения аналитических в единичном круге $U=\{z:|z|<1\}$ функций алгебраическими комплексными полиномами и усредненными значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$. Введены классы аналитических в единичном круге функций $W_m^{(r)}(\tau)$ и $W_m^{(r)}(\tau,\Phi)$, которые удовлетворяют определенным условиям. Для введенных классов функций вычислены точные значения некоторых известных n-поперечников. В работе используются методы решения экстремальных задач в нормированных пространствах аналитических в круге функций и разработанный В. М. Тихомировым метод оценки снизу n-поперечников функциональных классов в различных банаховых пространствах. Полученные в работе результаты являются обобщением и распространением на случай аналитических в единичном круге функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана, результатов работ С. Б. Вакарчука и А. Н. Щитова, полученных для классов дифференцируемых периодических функций.

Ключевые слова: аналитическая функция, алгебраический комплексный полином, наилучшее приближение, модуль непрерывности высших порядков, весовое пространство Бергмана

Для цитирования: *Лангаршоев М.Р.* О наилучшем приближении и значениях поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 339–350. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-339-350.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-339-350

On the best approximation and the values of the widths of some classes of functions in the Bergmann weight space

Mukhtor R. LANGARSHOEV
College near Moscow "Energia"
190 Bolshaya Moskovskaya St., Staraya Kupavna, Moscow Region 142450, Russian Federation

Abstract. We consider the extremal problem of finding exact constants in the Jackson–Stechkin type inequalities connecting the best approximations of analytic in the unit circle $U = \{z : |z| < 1\}$ functions by algebraic complex polynomials and the averaged values of the higher-order continuity modules of the r-th derivatives of functions in the Bergman weight space $B_{2,\gamma}$. The classes of analytic in the unit circle functions $W_m^{(r)}(\tau)$ and $W_m^{(r)}(\tau, \Phi)$ which satisfy some specific conditions are introduced. For the introduced classes of functions, the exact values of some known n-widths are calculated. In this paper, we use the methods of solving extremal problems in normalized spaces of functions analytic in a circle and a well-known method developed by V. M. Tikhomirov for estimating from below the n-widths of functional classes in various Banach spaces. The results obtained in the work generalize and extend the results of the works by S. B. Vakarchuk and A. N. Shchitova obtained for the classes of differentiable periodic functions to the case of analytic in the unit circle functions belonging to the Bergmann weight space.

Keywords: analytic function, algebraic complex polynomial, best approximation, higher-order continuity modulus, Bergmann weight space

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30E10, 42A10.

For citation: Langarshoev M.R. O nailuchshem priblizhenii i znacheniyah poperechnikov nekotoryh klassov funkcij v vesovom prostranstve Bergmana [On the best approximation and the values of the widths of some classes of functions in the Bergmann weight space]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 339–350. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-339-350. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Работа посвящена вопросам наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций и вычислению значений n-поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана.

Известно, что в экстремальных задачах теории приближения функций большую роль играют неравенства, в которых величина наилучшего приближения функций оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции или ее некоторой производной. Такие неравенства называются неравенствами типа Джексона–Стечкина. Задаче, связанной с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина для аналитических в единичном круге функций, посвящено значительное множество работ. Первые точные результаты по наилучшим полиномиальным приближениям аналитических в единичном круге функций были получены в работах [1–4]. В работе [5] были получены точные значения поперечников в смысле Колмогорова некоторых классов аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди. В дальнейшем эта тематика нашла свое отражение в многочисленных работах (см. [6–9] и приведенную в них литературу). В весовом пространстве Бергмана задачи, связанные с вычислением точных значений верхних граней наилучшего приближения и с вычислением точных значений n-поперечников классов аналитических в круге функций, были решены, например, в работах [10–14].

В данной работе введена и изучена экстремальная аппроксимационная характеристика, которая в отличии от ранее изученных экстремальных характеристик содержит модуль непрерывности не только под знаком интеграла, но и вне интеграла в весовом пространстве Бергмана. Вычислены значения бернштейновского, колмогоровского, гельфандовского, линейного и проекционного n-поперечника для различных классов функций, определяемых модулями непрерывности r-ых производных функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана.

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Известно, что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \le \rho < 1$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, если

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt\right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \le q \le \infty,$$

где $\gamma(\rho) \ge 0$ — суммируемая на $[0,1]$ функция. Множество всех комплексных алгебраических полиномов степени не выше n обозначим

$$\mathcal{P}_n = \left\{p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, a_k \in \mathbb{C}\right\}.$$

Через

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in B_{q,\gamma}$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$.

Легко доказать, что среди произвольных $p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}$ наименьшее значение величины наилучшего приближения в пространстве $B_{2,\gamma}$ доставляет частная сумма Тейлора

$$T_{n-1}(f,z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k,$$

разложения функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = T_{n-1}(f,z) + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k$$

в круге $|z| < 1$. При этом

$$E_n(f)_{B_{2,\gamma}} = \left\| f - T_{n-1}(f) \right\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \int\limits_0^1 \rho^{k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}^{1/2}. \tag{1.1}$$

Величину

$$\begin{aligned} \omega_m(f,t)_{B_{q,\gamma}} &= \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f,\cdot,\cdot)\|_{B_{q,\gamma}} : |h| \le t \right\} \\ &= \sup \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |\Delta_h^m(f;\rho,u)|^q d\rho du \right)^{1/q} : |h| \le t \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_h^m(f;\rho,u) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)$$

— разность m-го порядка функции $f\left(\rho e^{it}\right)$ по аргументу t с шагом h, назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка.

Производную r-го порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ функции $f(z)$ обозначим через

$$f^{(r)}(z) = \frac{d^r f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^{k-r},\ \alpha_{k,r} = k!\left[(k-r)!\right]^{-1},\ k \ge r.$$

Всюду далее полагаем

$$\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)} = \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} :\ \left\| z^r f^{(r)} \right\|_{q,\gamma} < \infty \right\},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le q \le \infty.$$

Введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\chi_{m,n,r}(\tau) = \sup_{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_n(f)_{2,\gamma}}{\left\{ \omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, \tau\right)_{2,\gamma} + n^2 \int\limits_0^{\tau} (\tau - u) \omega_m^{2/m} \left(z^r f^{(r)}, u\right)_{2,\gamma} du \right\}^{m/2}}, \tag{1.2}$$

где $0 < \tau \le \pi/n,\ \ m,n \in \mathbb{N},\ \ r \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть X — банахово пространство, S — единичный шар в X, $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество X, $\Lambda_n \subset X$ — n-мерное подпространство, $\Lambda^n \subset X$ — подпространство коразмерности n, $\mathcal{L} :\ X$ — непрерывный линейный оператор и $\mathcal{L}^{\perp} : X \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования.

Величины

$$b_n(\mathfrak{N},X)=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0;\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{N}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset X\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{N},X)=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|_X:\ f\in\mathfrak{N}\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset X\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{N},X)=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|_X:\ \varphi\in\Lambda_n\right\}:f\in\mathfrak{N}\right\}:\Lambda_n\subset X\right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{N},X)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\|_X:\ f\in\mathfrak{N}\right\}:\ \mathcal{L}X\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset X\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{N},X)=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}f\|_X:\ f\in\mathfrak{N}\right\}:\mathcal{L}^{\perp}X\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset X\right\},$$

называют, соответственно, бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками в пространстве X. Поскольку X — весовое пространство Бергмана $B_{2,\gamma}$, то для перечисленных выше n-поперечников выполняются соотношения [15, с. 239]:

$$b_n(\mathfrak{N},X)\le d^n(\mathfrak{N},X)\le d_n(\mathfrak{N},X)=\lambda_n(\mathfrak{N},X)=\Pi_n(\mathfrak{N},X). \tag{1.3}$$

Также полагаем

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}):=\sup\{E_n(f):\ f\in\mathfrak{N}\}.$$

Пусть $\Phi(\tau)$ $(\tau\ge 0)$ — произвольная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Для любых $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $\tau>0$ определим классы функций

$$W_m^{(r)}(\tau)=\left\{f\in B_{2,\gamma}:\ \frac{1}{\tau^2}\omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma}+\left(\frac{n}{\tau}\right)^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},u\right)_{2,\gamma}du\le 1\right\},$$

$$W_m^{(r)}(\tau,\Phi)=\left\{f\in B_{2,\gamma}:\ \omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma}+n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},u\right)_{2,\gamma}du\le\Phi^{m/2}(\tau)\right\}.$$

Положим

$$(1-\cos nt)_*^m=\begin{cases}(1-\cos nt)^m, & \text{если}\quad nt<\pi,\\ 2^m, & \text{если}\quad nt\ge\pi.\end{cases}$$

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть m,n,r — произвольные натуральные числа, и $n>r$. Тогда для любых τ, удовлетворяющих условию $0<\tau\le\pi/n$, имеет место равенство*

$$\chi_{m,n,r}(\tau)=(n\tau)^{-m}, \tag{2.1}$$

и верхняя грань в равенстве (2.1) реализует функция $f_0(z)=z^n\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$.

Доказательство. Для произвольной аналитической функции $f(z)\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ имеет место соотношение [10]

$$\omega_m^2\left(z^rf^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma}=2^m\sup_{|u|\le\tau}\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2|c_k|^2\left(1-\cos ku\right)^m\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho. \tag{2.2}$$

Используя соотношения (1.1), (2.2), неравенство Гельдера, а также тот факт, что при любом $k\geq n$ выполнено $\alpha_{k,r}\geq\alpha_{n,r}$ получаем (см. [16])

$$\begin{aligned}
&E_n^2(f)_{2,\gamma}-\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\cos kt\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho=\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho(1-\cos kt)\\
&=\sum_{k=n}^{\infty}\Big\{|c_k|^2\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\Big\}^{1-1/m}\cdot\Big\{|c_k|^2\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\Big\}^{1/m}(1-\cos kt)\\
&\leq\sum_{k=n}^{\infty}\Big\{|c_k|^2\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\Big\}^{1-1/m}\cdot\Big\{\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho(1-\cos kt)^m\Big\}^{1/m}\\
&\leq\Big\{\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\Big\}^{1-1/m}\cdot\Big\{\frac{1}{2^m}2^m\sum_{k=n}^{\infty}\Big(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{n,r}}\Big)^2|c_k|^2\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho(1-\cos kt)^m\Big\}^{1/m}\\
&\leq E_n^{2-2/m}(f)_{2,\gamma}\,\frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}}\,\omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},t\right)_{2,\gamma}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$E_n^2(f)_{2,\gamma}-\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\cos kt\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\leq E_n^{2-2/m}(f)_{2,\gamma}\cdot\frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}}\omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},t\right)_{2,\gamma}.\tag{2.3}$$

Интегрируя неравенство (2.3) относительно t в пределах от 0 до u, будем иметь:

$$uE_n^2(f)_{2,\gamma}-\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\frac{\sin ku}{k}\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\leq E_n^{2-2/m}(f)_{2,\gamma}\frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}}\int\limits_0^u\omega_m^{2/m}(z^rf^{(r)},t)_{2,\gamma}dt.\tag{2.4}$$

Вновь интегрируя обе части неравенства (2.4) по u в пределах от 0 до τ, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau^2}{2}E_n^2(f)_{2,\gamma}-\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\frac{1-\cos k\tau}{k^2}\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\\
&\qquad\leq E_n^{2-2/m}(f)_{2,\gamma}\cdot\frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^u\omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},t\right)_{2,\gamma}dtdu
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau^2}{2}E_n^2(f)_{2,\gamma}\leq\frac{1}{n^2}\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2(1-\cos k\tau)\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\\
&\qquad+E_n^{2-2/m}(f)_{2,\gamma}\cdot\frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^u\omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)},t\right)_{2,\gamma}dtdu.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

Используя соотношение (2.3), преобразуем первое слагаемое в неравенстве (2.5), затем, применяя метод интегрирования по частям для второго слагаемого, получим

$$\frac{\tau^2}{2}E_n^{2/m}(f)_{2,\gamma} \le \frac{1}{2n^2\alpha_{n,r}^{2/m}}\left[\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma} + n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)},u\right)_{2,\gamma}du\right]. \tag{2.6}$$

Так как неравенство (2.6) имеет место для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, то для величины, стоящей в левой части равенства (2.1), запишем оценку сверху

$$\sup_{f\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_n(f)_{2,\gamma}}{\left\{\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)},\tau)_{2,\gamma} + n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)},u)_{2,\gamma}du\right\}^{m/2}} \le (n\tau)^{-m}. \tag{2.7}$$

С целью получения оценки снизу равную величине в правой части неравенства (2.7) достаточно рассмотреть экстремальную функцию $f_0(z) = z^n \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$. Для этой функции непосредственными вычислениями получаем

$$E_n(f_0)_{2,\gamma} = \left(\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}, \quad \omega_m\left(z^r f_0^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma} = 2^{m/2}\alpha_{n,r}(1-\cos nt)^{m/2}E_n(f_0)_{2,\gamma}.$$

$$\omega_m^{2/m}\left(z^r f_0^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma} + n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f_0^{(r)},u\right)_{2,\gamma}du = (n\tau)^2\alpha_{n,r}^{2/m}\left(\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/m}.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_n(f)_{2,\gamma}}{\left\{\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma} + n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)},u\right)_{2,\gamma}du\right\}^{m/2}}$$

$$\ge \frac{\alpha_{n,r}E_n(f_0)_{2,\gamma}}{\left\{\omega_m^{2/m}\left(z^r f_0^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma} + n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f_0^{(r)},u\right)_{2,\gamma}du\right\}^{m/2}} = (n\tau)^{-m}. \tag{2.8}$$

Сравнивая оценку сверху (2.7) и оценку снизу (2.8), получаем утверждение теоремы 2.1. □

Следует отметить, что экстремальная аппроксимационная характеристика типа (1.2) в пространстве L_2 была рассмотрена в работе [17].

Следствие 2.1. *Для любых τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau \le \pi/n$, выполняются неравенства*

$$\frac{1}{\alpha_{n,r}(n\tau)^m} \le \sup_{f\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}}\frac{E_n(f)_{2,\gamma}}{\omega_m\left(z^r f^{(r)};\tau\right)_{2,\gamma}} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}}\left(\frac{1}{(n\tau)^2}+\frac{1}{2}\right)^{m/2}. \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании неравенства (2.6) для произвольной функции $f(z) \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, имеем:

$$\tau^2 E_n^{2/m}(f) \le \frac{1}{n^2 \alpha_{n,r}^{2/m}} \left(1 + \frac{n^2\tau^2}{2}\right) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}; \tau)_{2,\gamma}.$$

Откуда следует оценка сверху

$$\frac{E_n(f)_{2,\gamma}}{\omega_m\left(z^r f^{(r)}; \tau\right)_{2,\gamma}} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{1}{(n\tau)^2} + \frac{1}{2}\right)^{m/2}. \tag{2.10}$$

Чтобы получить оценки снизу, заметим, что для экстремальной функции $f_0(z) = z^n \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ при всех значениях $0 < \tau \le \pi/n$

$$\begin{aligned}\omega_m\big(z^r f_0^{(r)}, \tau\big)_{2,\gamma} &= 2^{m/2}\alpha_{n,r}(1 - \cos n\tau)^{m/2} E_n(f_0)_{2,\gamma} = 2^m \alpha_{n,r} \sin^m \frac{n\tau}{2} E_n(f_0)_{2,\gamma} \\ &\le 2^m \alpha_{n,r} \left(\frac{n\tau}{2}\right)^m E_n(f_0)_{2,\gamma} = \alpha_{n,r}(n\tau)^m E_n(f_0)_{2,\gamma},\end{aligned}$$

или

$$\frac{E_n(f_0)_{2,\gamma}}{\omega_m\big(z^r f_0^{(r)}, \tau\big)_{2,\gamma}} \ge \frac{1}{\alpha_{n,r}(n\tau)^m}. \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) следует неравенство (2.9). $\square$

Теорема 2.2. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sigma_n(W_m^{(r)}(\tau), B_{2,\gamma}) = \frac{1}{\alpha_{n,r} n^m},$$

где $\sigma_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем неравенство (2.6) в виде

$$E_n^{2/m}(f)_{2,\gamma} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}^{2/m} n^2} \left[\frac{1}{\tau^2} \omega_m^{2/m}\big(z^r f^{(r)}, \tau\big)_{2,\gamma} + \left(\frac{n}{\tau}\right)^2 \int_0^\tau (\tau - u) \omega_m^{2/m}\big(z^r f^{(r)}, u\big)_{2,\gamma}\, du\right]. \tag{2.12}$$

Используя определение класса $W_m^{(r)}(\tau)$ из неравенства (2.12) можно получить оценки сверху для проекционного n-поперечника

$$\Pi_n(W_m^{(r)}(\tau), B_{2,\gamma}) \le \mathcal{E}(W_m^{(r)}(\tau))_{2,\gamma} \le \frac{1}{\alpha_{n,r} n^m}. \tag{2.13}$$

Для получения оценки снизу бернштейновского поперечника $b_n(W_m^{(r)}(\tau), B_{2,\gamma})$ вводим в рассмотрение $n+1$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1} = \left\{p_n \in \mathcal{P}_n : \|p\|_n \le \frac{1}{\alpha_{n,r} n^m}\right\}$$

и покажем, что $S_{n+1} \subset W_m^{(r)}(\tau)$. Для этого требуется доказать, что для произвольного алгебраического полинома $p_n \in S_{n+1}$ выполняется неравенство

$$\left[\frac{1}{\tau^2} \omega_m^{2/m}\left(z^r p_n^{(r)}, \tau\right)_{2,\gamma} + \left(\frac{n}{\tau}\right)^2 \int_0^\tau (\tau - u) \omega_m^{2/m}\left(z^r p_n^{(r)}, u\right)_{2,\gamma} du\right]^{m/2} \le 1.$$

Действительно, для произвольного $p_n(z) \in B_{2,\gamma}$ из соотношении (2.2) имеем

$$\omega_m^2(z^r p_n^{(r)}, \tau)_{2,\gamma} \le 2^m \alpha_{n,r}^2 (1-\cos n\tau)_*^m \|p_n\|_{2,\gamma}^2. \tag{2.14}$$

Тогда

$$\left[\frac{1}{\tau^2}\omega_m^{2/m}\left(z^r p_n^{(r)}, \tau\right)_{2,\gamma} + \left(\frac{n}{\tau}\right)^2 \int\limits_0^\tau (\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^r p_n^{(r)}, u\right)_{2,\gamma} du\right]^{m/2}$$

$$\le \left[\frac{2}{\tau^2}\alpha_{n,r}^{2/m}(1-\cos n\tau)\|p_n\|^{2/m} + \left(\frac{n}{\tau}\right)^2 \int\limits_0^\tau 2\alpha_{n,r}^{2/m}(\tau-u)(1-\cos nu)\|p_n\|^{2/m} du\right]^{m/2} \le 1.$$

Согласно теореме В. М. Тихомирова [2] о поперечнике шара получим оценки снизу для бернштейновского n-поперечника

$$b_n(W_m^{(r)}(\tau), B_{2,\gamma}) \ge b_n(S_{n+1}, B_{2,\gamma}) \ge \frac{1}{\alpha_{n,r} n^m}. \tag{2.15}$$

Учитывая соотношения (1.3), и сопоставляя неравенства (2.13), (2.15), получаем утверждение теоремы 2.2. □

Теорема 2.3. *Пусть для любых натуральных m, n, r функция Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(\tau)}{\Phi(\pi/n)} \ge \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{m/2} \begin{cases} \left(\dfrac{\pi^2}{2} - \cos n\tau - 1\right)^{m/2}, & \text{если } 0 \le \tau \le \pi/n, \\ \left(2\pi n\tau - \dfrac{\pi^2}{2} - n^2\tau^2\right)^{m/2}, & \text{если } \tau \ge \pi/n. \end{cases} \tag{2.16}$$

Тогда имеет место следующее равенство

$$\gamma_n(W_m^{(r)}(\tau, \Phi), B_{2,\gamma}) = \frac{1}{\alpha_{n,r}\pi^m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{2.17}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников.

Доказательство. Положим $h = \pi/n$. Запишем неравенство (2.6) в виде

$$E_n(f)_{2,\gamma} \le \frac{1}{n^m \tau^m \alpha_{n,r}}\left[\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, \tau)_{2,\gamma} + n^2 \int\limits_0^\tau (\tau-u)\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, u)_{2,\gamma} du\right]^{m/2}.$$

Имеем:

$$E_n(f)_{2,\gamma} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}\pi^m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Отсюда следует оценка сверху для проекционного n-поперечника

$$\Pi_n(W_m^{(r)}(t, \Phi), B_2) \le \mathcal{E}_n(W_m^{(r)}(t, \Phi))_{2,\gamma} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}\pi^m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.18}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим в подпространстве $\mathcal{P}_n$ шар

$$S_{n+1} = \left\{p_n(z) \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{2,\gamma} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}\pi^m}\Phi(\pi/n)\right\}$$

и покажем, что он принадлежит классу $W_m^{(r)}(\tau,\Phi)$. Рассуждения проведем для случаев $0\le\tau\le\pi/n$ и $\tau\ge\pi/n$.

Пусть $0\le\tau\le\pi/n$. Используя определение класса $W_m^{(r)}(\tau,\Phi)$, а также первое из ограничений (2.16), получим

$$\left(\omega_m^{2/m}(z^r p_n^{(r)},\tau)_{2,\gamma}+n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)},u)_{2,\gamma}du\right)^{m/2}$$
$$\le 2^{m/2}\alpha_{n,r}\|p_n\|_{2,\gamma}\left[1-\cos n\tau+n^2\int\limits_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-u\right)(1-\cos nu)du\right]^{m/2}$$
$$=\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{m/2}\Phi(\pi/n)\left(\frac{\pi^2}{2}-\cos n\tau-1\right)^{m/2}\le\Phi(\tau). \tag{2.19}$$

Пусть теперь $\tau\ge\pi/n$. Согласно определению класса $W_m^{(r)}(\tau,\Phi)$, неравенству (2.14) и второму из ограничений (2.16), получаем

$$\left(\omega_m^{2/m}(z^r p_n^{(r)},\tau)_{2,\gamma}+n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)},u)_{2,\gamma}du\right)^{m/2}$$
$$\le 2^{m/2}\alpha_{n,r}\|p_n\|_{2,\gamma}\left[(1-\cos n\tau)_*+n^2\int\limits_0^{\tau}(\tau-u)(1-\cos nu)_*du\right]^{m/2}$$
$$=\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{m/2}\Phi(\pi/n)\left(2\pi n\tau-\frac{\pi^2}{2}-n^2\tau^2\right)^{m/2}\le\Phi(\tau). \tag{2.20}$$

Из неравенств (2.19) и (2.20) вытекает, что $S_{n+1}\subset W_m^{(r)}(\tau,\Phi)$. В силу определения бернштейновского n-поперечника и неравенств (1.3) для рассматриваемых n-поперечников справедливы следующие оценки снизу

$$b_n(W_m^{(r)}(\tau,\Phi),B_{2,\gamma})\ge b_n(S_{n+1},B_{2,\gamma})\frac{1}{\alpha_{n,r}\pi^m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.21}$$

Сопоставляя найденные выше оценку сверху (2.18) и оценку снизу (2.21), получаем требуемое равенство (2.17). □

References

[1] К. И. Бабенко, “О наилучших приближениях одного класса аналитических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5 (1958), 631–640. [K. I. Babenko, “Best approximations to a class of analytic functions”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **22**:5 (1958), 631–640 (In Russian)].

[2] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3(93) (1960), 81–120; англ. пер.:V. M. Tikhomirov, “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Russian Math. Surveys*, **15**:3 (1960), 75–111.

[3] Л. В. Тайков, “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 155–162; англ. пер.:L. V. Taikov, “On the best approximation in the mean of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **1**:2 (1967), 104–109.

[4] М. З. Двейрин, “Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге”, *Теория функций, функциональный анализ и прил*, **23** (1975), 32–46. [M. Z. Dveyrin, “Widths and ε-entropy of classes of functions that are analytic in the unit circle of functions”, *Function Theory, Functional Analysis and their Applications*, **23** (1975), 32–46 (In Russian)].

[5] Н. Айнуллоев, Л. В. Тайков, “Наилучшее приближение в смысле А. Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций”, *Матем. заметки*, **40**:3 (1986), 341–351; англ. пер.:N. Ainulloev, L. V. Taikov, “Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc”, *Math. Notes*, **40**:3 (1986), 699–705.

[6] Ю. А. Фарков, “Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из C_n”, *УМН*, **45**:5 (1990), 197–198; англ. пер.:Yu. A. Farkov, “Widths of Hardy classes and Bergman classes on the ball in C_n”, *Russian Math. Surveys*, **45**:5 (1990), 229–231.

[7] С. Б. Вакарчук, “Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 665–669; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Exact values of widths of classes of analytic functions on the disk and best linear approximation methods”, *Math. Notes*, **72**:5 (2002), 615–619.

[8] С. Б. Вакарчук, “О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости”, *Укр. матем. журн.*, **56**:9 (2004), 1155–1171; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Exact values of widths of classes of analytic functions on the disk and best linear approximation methods”, *Ukrainian Math. J.*, **56**:9 (2004), 1371–1390.

[9] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, Дж. Дж. Заргаров, “О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди”, Тр. ИММ УрО РАН, **27**, №4, 2021, 239–254. [M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, J. J Zargarov, “On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **27**, no. 4, 2021, 239–254 (In Russian)].

[10] М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, “О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathfrak{B}_{2,\gamma}$”, *Доклады Академии наук*, **412**:4 (2007), 466–469; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, O. Sh. Shabozov, “On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces”, *Doklady Mathematics*, **75**:1 (2007), 97–100.

[11] С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов, “О поперечниках классов функций, аналитических в круге”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 3–21; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, M. Sh. Shabozov, “The widths of classes of analytic functions in a disc”, *Sbornik Mathematics*, **201**:8 (2010), 1091–1110.

[12] М. Ш. Шабозов, М. Р. Лангаршоев, “О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций”, *Сиб. матем. журн.*, **60**:6 (2019), 1414–1423; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, M. R. Langarshoev, “Best linear approximation methods for some classes of analytic functions on the unit disk”, *Siberian Mathematical Journal*, **60**:6 (2019), 1101–1108.

[13] М. Р. Лангаршоев, “Неравенства типа Джексона–Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана”, *Чебышевский сб.*, **22**:2 (2021), 135–144. [M. R. Langarshoev, “Jackson–Stechkin type inequalities and widths of classes of functions in the weighted Bergman space”, *Chebyshevskii Sb.*, **22**:2 (2021), 135–144 (In Russian)].

[14] М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов, “Приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам в L_2”, *Изв. вузов. Матем.*, **64**:6 (2020), 65–72; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusaynov, “Approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems in L_2”, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **64**:6 (2020), 56–62.

[15] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976. [V. M. Tikhomirov, *Some Questions of Approximation Theory*, Moscow State University Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

[16] В. В. Шалаев, “О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков”, *Укр. матем. журн.*, **43**:1 (1991), 125–129; англ. пер.:V. V. Shalaev, “Widths in L_2 classes of differentiable functions that can be determined by higher-order moduli of continuity”, *Ukrainian Math. J.*, **43**:1 (1991), 104–107.

[17] С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций”, *Укр. матем. журн.*, **56**:11 (2004), 1458–1466; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, A. N. Shchitov, “The best polynomial approximations in L_2 and widths of some classes of functions”, *Ukrainian Math. J.*, **56**:11 (2004), 1738–1747.

Информация об авторе

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, кандидат физико-математических наук, преподаватель математики. Подмосковный колледж «Энергия», г. Старая Купавна, Московская обл., Российская Федерация. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3278-4781

Information about the author

Mukhtor R. Langarshoev, Candidate of Physics and Mathematics, Mathematics Teacher. College near Moscow “Energia”, Staraya Kupavna, Moscow Region, Russian Federation. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3278-4781

Поступила в редакцию 07.09.2022 г.
Поступила после рецензирования 14.11.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Received 07.09.2022
Reviewed 14.11.2022
Accepted for press 24.11.2022